

$n < 10$, 所以 E 的“解集中点值”为 $n+m$. 因为不等式组 F 对于不等式组 E 中点包含, 所以 $\frac{3n+m}{2} < n+m < 5+n$, 解得 $n < m < 5$.

因为所有符合要求的整数 m 之和为 9, 所以整数 m 可取 2, 3, 4 或 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 所以 $1 \leq n < 2$ 或 $-2 \leq n < -1$.

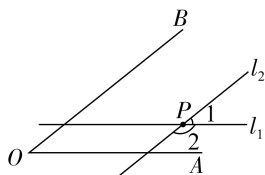
第4章 平面内的两条直线

4.1 平面内两条直线的位置关系

4.1.1 平行线

刷基础

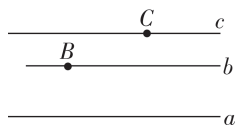
- C** 【解析】在同一个平面内, 不重合的两条直线的位置关系是平行或相交. 故选 C.
- C** 【解析】画出直线 $b \parallel a$ 的操作步骤的正确顺序是④②③①. 故选 C.
- ①②③④ 【解析】根据平行线的定义可知是平行线的是①②③④.
- 【解】(1)(2) 如图所示.



归纳总结

平行线的画法: 一靠, 二推, 三画.

- (3) $\angle 1 = \angle O$, $\angle 2 + \angle O = 180^\circ$, 所以 l_1 和 l_2 的夹角与 $\angle O$ 相等或互补.
- B** 【解析】因为 $a \parallel b$, $b \parallel c$, 所以 $a \parallel c$. 故选 B.
 - 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行
 - 【解】(1) 过点 B 画直线 a 的平行线, 能画 1 条, 如图. 理由如下:
过直线 a 外一点有且只有一条直线与直线 a 平行.
(2) 过点 C 画直线 a 的平行线, 它与过点 B 的平行线平行. 理由如下:
如图, 因为 $b \parallel a$, $c \parallel a$, 所以 $c \parallel b$. (平行于同一条直线的两条直线平行)



刷易错

- D** 【解析】①若点 A 在直线 a 上, 则不能作出直线 a 的平行线; ②若点 A 不在直线 a 上, 则有且只有一条直线与 a 平行. 所以不能确定.

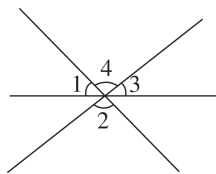
4.1.2 相交直线所成的角

刷基础

- B** 【解析】A 选项, 不是对顶角, 不符合题意;

B 选项, 是对顶角, 符合题意; C 选项, 不是对顶角, 不符合题意; D 选项, 不是对顶角, 不符合题意. 故选 B.

- C** 【解析】因为 $\angle AOD = 135^\circ$, $\angle COB = \angle AOD$, 所以 $\angle COB = \angle 1 + \angle 2 = 135^\circ$. 因为 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle 2$, 所以 $3 \angle 1 = 135^\circ$, 所以 $\angle 1 = 45^\circ$. 故选 C.
- D** 【解析】如图, 根据对顶角相等可得 $\angle 2 = \angle 4$. 由平角的定义可得 $\angle 1 + \angle 4 + \angle 3 = 180^\circ$, 所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. 故选 D.



- 对顶角相等 【解析】由题图知, 两根相交的长条相当于两条相交直线, 其中测量物体的角和量角器测量的角是一一对顶角, 其原理是对顶角相等.
- 64 【解析】由对顶角相等可知, $\angle FBC = \angle ABE = 45^\circ$. 因为 $\angle CBD = 19^\circ$, 所以 $\angle DBF = \angle FBC + \angle CBD = 45^\circ + 19^\circ = 64^\circ$, 故答案为 64.
- C** 【解析】直线 AB, DE 被直线 AC 所截而成的角中, $\angle A$ 与 $\angle 3$ 在两直线的同侧, 并且在截线的同旁, 所以 $\angle A$ 的同位角是 $\angle 3$. 故选 C.
- C** 【解析】因为 $\angle DAO$ 和 $\angle AOC$ 在 AD, BC 的内部, 且在 OA 的同侧, 所以 $\angle DAO$ 和 $\angle AOC$ 是一对同旁内角. 故选 C.

- D** 【解析】A 选项, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角, 不符合题意; B 选项, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角, 不符合题意; C 选项, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角, 不符合题意; D 选项, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 不是同位角, 符合题意. 故选 D.

- ①②③⑤ 【解析】① $\angle A$ 与 $\angle 1$ 是同位角, 正确; ② $\angle A$ 与 $\angle B$ 是同旁内角, 正确; ③ $\angle 4$ 与 $\angle 1$ 是内错角, 正确; ④ $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 不是同位角, 原说法错误; ⑤ $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是对顶角, 正确. 所以正确的是①②③⑤, 故答案为①②③⑤.

归纳总结

同位角的边构成“F”形, 内错角的边构成“Z”形, 同旁内角的边构成“U”形.

易错警示

点与直线有两种位置关系, 即点在直线上和点在直线外, 如果点与直线的位置关系没有确定, 一定要注意分类讨论.

刷易错

10. 4 【解析】与 $\angle A$ 是同旁内角的有 $\angle ABC$, $\angle ADC$, $\angle ADE$, $\angle AED$, 共 4 个. 故答案为 4.

刷提升

1. D 【解析】由题意可知, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ = \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 4$, 所以当 $\angle 1$ 增大 10° 时, $\angle 2$ 减小 10° , $\angle 3$ 增大 10° , $\angle 4$ 减小 10° , 所以 $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 的和减小. 故选 D.

2. 37.5° 【解析】因为 $\angle BOC - \angle BOD = 30^\circ$, $\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$, 所以 $\angle BOD = 75^\circ$, 所以 $\angle AOC = \angle BOD = 75^\circ$. 又因为 OE 平分 $\angle AOC$, 所以 $\angle COE = \frac{1}{2} \angle AOC = 37.5^\circ$. 故答案为 37.5° .

3. 【解】(1) 因为 $\angle BOC = 75^\circ$, 所以 $\angle AOD = \angle BOC = 75^\circ$. 因为 $\angle AOM : \angle MOD = 2 : 3$, 所以 $\angle AOM = \frac{2}{5} \angle AOD = 30^\circ$.

(2) OB 平分 $\angle CON$, 理由:

由(1)知 $\angle AOM = 30^\circ$, 所以 $\angle BOM = 180^\circ - \angle AOM = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. 因为 ON 平分 $\angle BOM$, 所以 $\angle BON = \frac{1}{2} \angle BOM = 75^\circ$.

因为 $\angle BOC = 75^\circ$, 所以 $\angle BOC = \angle BON$, 所以 OB 平分 $\angle CON$.

4. 【解】(1) 路径: $\angle 1 \xrightarrow{\text{内错角}} \angle 12 \xrightarrow{\text{同旁内角}} \angle 8$. (路径不唯一)

(2) 从起始位置 $\angle 1$ 依次按同位角、内错角、同旁内角的顺序跳, 能跳到终点位置 $\angle 8$. 其路径为 $\angle 1 \xrightarrow{\text{同位角}} \angle 10 \xrightarrow{\text{内错角}} \angle 5 \xrightarrow{\text{同旁内角}} \angle 11 \xrightarrow{\text{同位角}} \angle 8$. (路径不唯一)

刷素养

5. 【解】(1) 如题图(1), 图中共有 $1 \times 2 = 2$ (对) 对顶角, 4 对邻补角. 故答案为 2, 4.
(2) 如题图(2), 图中共有 $2 \times 3 = 6$ (对) 对顶角, 12 对邻补角. 故答案为 6, 12.
(3) 如题图(3), 图中共有 $3 \times 4 = 12$ (对) 对顶角, 24 对邻补角. 故答案为 12, 24.
(4) 研究(1)~(3)小题中直线条数与对顶角、邻补角的对数之间的关系, 可得若有 n 条直线相交于一点, 则可形成 $n(n-1)$ 对对顶角,

易错警示

寻找“三线八角”的关键是直接找截线入手, 由已知角的两边确定不同的截线, 避免漏解.

归纳总结

判断一个运动是不是平移现象, 要紧扣平移定义的特征: 一变三不变, 即图形的位置改变, 形状、大小、方向都不变.

$2n(n-1)$ 对邻补角.

4.2 平移

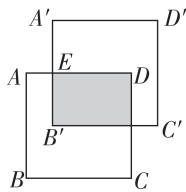
刷基础

1. D 【解析】电梯的升降, 是平移现象, 故选项 A 不符合题意; 火车在平直的铁轨上行驶, 是平移现象, 故选项 B 不符合题意; 飞机起飞前在跑道上滑行, 是平移现象, 故选项 C 不符合题意; 卫星绕地球飞行, 不是平移现象, 故选项 D 符合题意. 故选 D.

2. C 【解析】由平移只改变位置, 不改变大小、形状和方向可知, 四个选项中只有 C 选项中的图案可以看作由一个基本图案经过平移得到的. 故选 C.

3. 羽, 朋, 圭 (答案不唯一) 【解析】根据题意, 可以由平移变换得到的汉字有羽, 朋, 圭等.

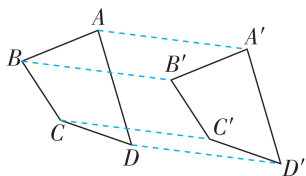
4. B 【解析】如图, 设 AD 与 $A'B'$ 交于点 E . 因为将边长为 4 cm 的正方形 $ABCD$ 先向上平移 2 cm, 再向右平移 1 cm, 所以 $A'E = 2$ cm, $AE = 1$ cm, 所以 $B'E = 2$ cm, $DE = 3$ cm, 所以阴影部分的面积为 $2 \times 3 = 6$ (cm²), 故选 B.



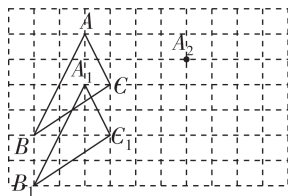
5. C 【解析】通过平移可知, 题图中虚线的横向距离等于 AB 的长, 纵向距离等于 $2(AD-2)$ 的长, 所以从入口 A 到出口 B 所走的路线长为 $60 + 2 \times (24 - 2) = 104$ (米), 故选 C.

6. 40° 【解析】因为平移不改变图形的形状, 三角形 ABC 经过平移变换得到三角形 DEF , $\angle BAC = 40^\circ$, 所以 $\angle EDF = \angle BAC = 40^\circ$.

7. 【解】如图所示, 四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求.

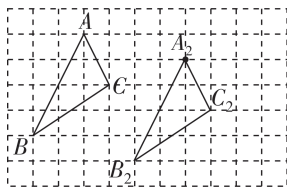


8. 【解】(1) 如图(1)所示, 三角形 $A_1B_1C_1$ 即为所求.



图(1)

(2) 如图(2)所示, 三角形 $A_2B_2C_2$ 即为所求.



图(2)

(3) 因为一个图形和它经过平移所得的图形中, 两组对应点的连线平行且相等, 所以 $AA_2 \parallel BB_2$, $AA_2 = BB_2$, 故答案为 $AA_2 \parallel BB_2$, $AA_2 = BB_2$.

刷提升

1. **C** 【解析】由题知, $C_1 = AB + BE + DE + AD$, $C_2 = BC + CF + EF + BE$. 由平移可知, $AB = DE$, $BE = AD = CF$, $BC = EF$, 所以 $C_1 = 2AB + 2BE$, $C_2 = 2BC + 2BE$, 所以 $C_1 + C_2 = 2(AB + BC + 2BE)$, $C_1 - C_2 = 2(AB - BC)$. 故选 C.

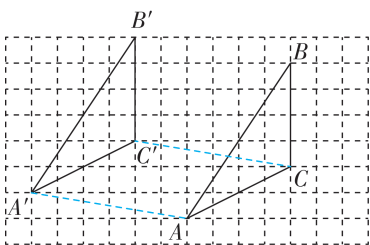
2. **B** 【解析】因为三角形 ABC 以每秒 1 cm 的速度沿 BC 向右平移, 得到三角形 DEF , 平移时间为 $t(t < 6)$ 秒, 所以 $BE = CF = t$ cm. 当 $BE = 2CE$, 即 $t = 2(6 - t)$ 时, 解得 $t = 4$; 当 $CE = 2BE$, 即 $6 - t = 2t$ 时, 解得 $t = 2$; 当 $BC = 2BE$, 即 $6 = 2t$ 时, 解得 $t = 3$; 当 $BC = 2EC$, 即 $6 = 2(6 - t)$ 时, 解得 $t = 3$. 综上所述, t 的值为 2 或 3 或 4, 故选 B.

3. 【解】(1) 如图(1), 三角形 $A'B'C'$ 即为所求.

(2) 连接 AA' , CC' , 如图(1), 线段 AC 所扫过的面积即四边形 $A'ACC'$ 的面积, 为 $10 \times 3 - \frac{1}{2} \times$

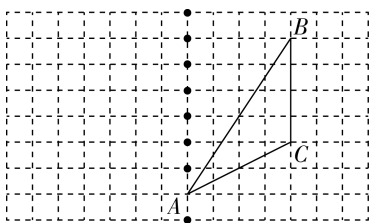
$$2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 6 - \frac{1}{2} \times 1 \times 6 = 16.$$

故答案为 16.



图(1)

(3) 如图(2), 满足条件的格点 P 共有 8 个. 故答案为 8.



图(2)

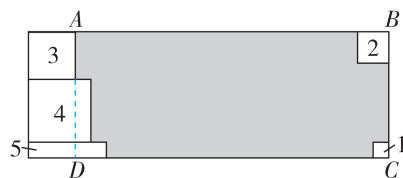
归纳总结

确定一个图形平移后的位置需要三个条件: (1) 图形原来的位置; (2) 平移的距离; (3) 平移的方向, 三个条件缺一不可.

思路分析

先根据平行线的性质得到 $\angle FED = \angle GFB = 56^\circ$, 再利用角的和差关系进行计算即可得解.

4. **B** 【解析】设 1 号正方形的边长为 x , 2 号正方形的边长为 y , 则 3 号正方形的边长为 $x + y$, 4 号正方形的边长为 $2x + y$, 5 号长方形的长为 $3x + y$, 宽为 $y - x$. 由题图(1)中长方形的周长为 40, 得 $y + 2(x + y) + (2x + y) = 20$, 解得 $x + y = 5$. 如图, 因为题图(2)中长方形的周长为 58, 所以 $AB + 2(x + y) + 2x + y + y - x = 29$, 所以 $AB = 29 - 3x - 4y$. 根据平移得, 阴影部分的周长为四边形 $ABCD$ 的周长, 所以 $2(AB + AD) = 2(29 - 3x - 4y + x + y + 2x + y + y - x) = 2(29 - x - y) = 2 \times (29 - 5) = 48$. 故选 B.



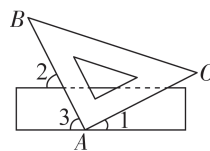
5. 【解】因为直角三角形 ABC 沿 AB 方向平移 2 cm 得到三角形 DEF , $CH = 2$ cm, $EF = 5$ cm, 所以 $BC = EF = 5$ cm, $BE = AD = 2$ cm, $\angle E = \angle ABC = 90^\circ$, $S_{\text{三角形}DEF} = S_{\text{三角形}ABC}$, 所以 $BH = BC - CH = 5 - 2 = 3$ (cm). 因为 $S_{\text{三角形}ABC} = S_{\text{阴影}} + S_{\text{三角形}DBH}$, $S_{\text{三角形}DEF} = S_{\text{梯形}BEFH} + S_{\text{三角形}DBH}$, 所以 $S_{\text{阴影}} + S_{\text{三角形}DBH} = S_{\text{梯形}BEFH} + S_{\text{三角形}DBH}$, 所以 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{梯形}BEFH} = \frac{1}{2}(BH + EF) \cdot BE = \frac{1}{2} \times (3 + 5) \times 2 = 8(\text{cm}^2)$, 即阴影部分的面积为 8 cm^2 .

4.3 平行线的性质

刷基础

1. **B** 【解析】根据两直线平行, 同位角相等得 $\angle 2 = \angle 1 = 60^\circ$.

2. **B** 【解析】如图, 因为 $\angle 1 = 27^\circ$, 所以 $\angle 3 = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$. 因为直尺的两边互相平行, 所以 $\angle 2 = \angle 3 = 63^\circ$. 故选 B.

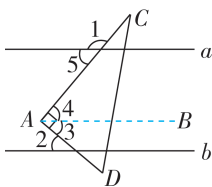


3. **36°** 【解析】因为 $AB \parallel CD$, $\angle FED = 56^\circ$, 所以 $\angle FED = \angle GFB = 56^\circ$. 因为 $\angle HFB = 20^\circ$, 所以 $\angle GFH = \angle GFB - \angle HFB = 36^\circ$, 故答案为 36° .

4. **C** 【解析】如图, 因为长方形对边平行, 所以 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle 2 = \angle DEF$. 因为 $\angle 1 = 25^\circ$, $\angle GEF = 90^\circ$, 所以 $\angle 2 = 25^\circ + 90^\circ = 115^\circ$, 故

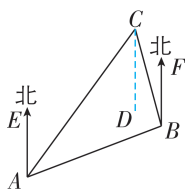
3. 130° 【解析】如图所示,

过点 A 作 $AB \parallel$ 直线 a . 因为直线 $a \parallel b$, 所以 $a \parallel b \parallel AB$, 所以 $\angle 2 = \angle 3 = 40^\circ$, $\angle 4 = \angle 5$. 又因为 $\angle CAD = 90^\circ$, 所以 $\angle 4 = 50^\circ$, 所以 $\angle 5 = 50^\circ$, 所以 $\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, 故答案为 130° .



4. 51° 【解析】过点 C 作 $CD \parallel$

AE , 如图所示. 因为 $AE \parallel BF$, 所以 $AE \parallel CD \parallel BF$, 所以 $\angle ACD = \angle EAC = 36^\circ$, $\angle BCD = \angle CBF = 15^\circ$, 所以 $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 36^\circ + 15^\circ = 51^\circ$. 故答案为 51° .

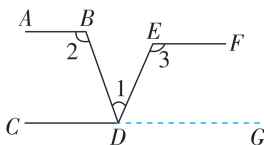


关键点拨

添加辅助线, 由平行线的基本事实的推论得到 $AE \parallel CD \parallel BF$, 利用平行线的性质计算即可.

5. 30° 【解析】因为 $AB \parallel EF$, 所以 $\angle B = \angle BEF$. 因为 $EF \parallel CD$, 所以 $\angle D = \angle DEF$. 因为 $\angle BED = \angle BEF + \angle DEF$, 所以 $\angle BED = \angle B + \angle D$. 因为 $\angle B + \angle BED + \angle D = 192^\circ$, 所以 $2\angle B + 2\angle D = 192^\circ$, 所以 $\angle B + \angle D = 96^\circ$. 因为 $\angle B - \angle D = 24^\circ$, 所以 $\angle B = 60^\circ$, 所以 $\angle BEF = \angle B = 60^\circ$. 因为 EG 平分 $\angle BEF$, 所以 $\angle GEF = 30^\circ$.

6. 【解】如图, 延长 CD 至 G . 因为 $AB \parallel CD \parallel EF$, 所以 $\angle 2 + \angle BDC = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle EDG = 180^\circ$, 所以 $\angle 2 + \angle 3 + \angle BDC + \angle EDG = 360^\circ$. 因为 $\angle 1 + \angle BDC + \angle EDG = 180^\circ$, 所以 $\angle BDC + \angle EDG = 180^\circ - \angle 1$, 所以 $\angle 2 + \angle 3 + 180^\circ - \angle 1 = 360^\circ$, 所以 $\angle 2 + \angle 3 - \angle 1 = 180^\circ$.



关键点拨

过拐点作辅助线, 掌握平行线的性质的综合运用是解题的关键.

刷素养

7. 【解】(1) $\angle BFD = \angle ABF + \angle CDF$. 如图(1)所示, 过点 F 作 $FG \parallel AB$.

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \parallel FG \parallel CD$, 所以 $\angle ABF = \angle BFG$, $\angle CDF = \angle DFG$.

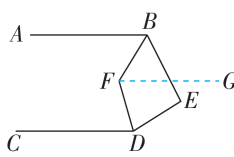
因为 $\angle BFG + \angle DFG = \angle BFD$, 所以 $\angle BFD = \angle ABF + \angle CDF$.

(2) $2\angle BFD = \angle ABE + \angle CDE$. 理由:

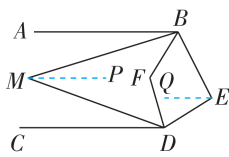
因为 BF 为 $\angle ABE$ 的平分线, DF 为 $\angle CDE$ 的平分线, 所以 $\angle ABF = \angle FBE = \frac{1}{2} \angle ABE$,

$\angle CDF = \angle FDE = \frac{1}{2} \angle CDE$,

所以 $\angle BFD = \frac{1}{2} \angle ABE + \frac{1}{2} \angle CDE$, 所以 $\angle ABE + \angle CDE = 2\angle BFD$.



图(1)



图(2)

(3) 如图(2)所示, 过点 E 作 $EQ \parallel AB$, 过点 M 作 $MP \parallel AB$. 设 $\angle ABM = y$. 因为 $CD \parallel AB$, 所以 $EQ \parallel MP \parallel AB \parallel CD$, 所以 $\angle PMD = \angle CDM = 20^\circ$, $\angle ABM = \angle PMB = y$, $\angle ABE + \angle QEB = 180^\circ$, $\angle CDE + \angle QED = 180^\circ$, 所以 $\angle ABE + \angle QEB + \angle CDE + \angle QDE = 360^\circ$, 所以 $\angle ABE + \angle CDE + \angle BED = 360^\circ$, 所以 $\angle BED = 360^\circ - (\angle ABE + \angle CDE)$.

因为 $\angle BED + 8\angle BMD = 360^\circ$, 所以 $360^\circ - (\angle ABE + \angle CDE) + 8\angle BMD = 360^\circ$,

所以 $8\angle BMD = \angle ABE + \angle CDE$.

因为 $\angle BMD = \angle PMD + \angle PMB = 20^\circ + y$,

所以 $8\angle BMD = 8(20^\circ + y) = 160^\circ + 8y = \angle ABE + \angle CDE$.

因为 $\angle ABM = \frac{1}{4} \angle EBF = y$, 所以 $\angle EBF = 4y$.

因为 BF 为 $\angle ABE$ 的平分线, DF 为 $\angle CDE$ 的平分线, 所以 $\angle EBF = \angle ABF = 4y$, $\angle CDF = \angle EDF$, 所以 $\angle ABE = 8y$. 因为 $\angle ABE + \angle CDE = 160^\circ + 8y$, 所以 $\angle CDF = \angle EDF = 80^\circ$, 所以 $\angle MDF = \angle CDF - \angle CDM = 60^\circ$.

4.4 平行线的判定

课时 1 平行线的判定方法 1



刷基础

1. C 【解析】由题图可知, 根据“同位角相等, 两直线平行”判定 $l_1 \parallel l_2$, 需要的条件是 $\angle 1 = \angle 4$. 故选 C.

2. $\angle FEB = \angle C$ (答案不唯一) 【解析】因为 $\angle FEB = \angle C$, 所以 $AB \parallel CD$ (同位角相等, 两直线平行). 故答案为 $\angle FEB = \angle C$ (答案不唯一).

3. C 【解析】因为 $\angle AEF = \angle ABC$, 所以 $EF \parallel BC$, 所以 $\angle FEB + \angle EBC = 180^\circ$, 故 C 选项正确, 故选 C.

4. A 【解析】当 $\angle 1 = \angle 2$ 时, $a \parallel b$. 因为 $\angle 1 = 75^\circ$, $\angle 2 = 43^\circ$, 所以木条 a 需要按箭头所示的方向旋转的度数至少是 $75^\circ - 43^\circ = 32^\circ$. 故选 A.

5. 125° 【解析】如图, 因为 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 6$, 所以 $\angle 1 = \angle 6$, 所以 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$. 因为 $\angle 3 = 55^\circ$, 所以 $\angle 5 = 180^\circ - 55^\circ =$

在(2)的条件下, $\angle PHD = \frac{1}{2} \angle QHD = 80^\circ$.

分三种情况讨论:

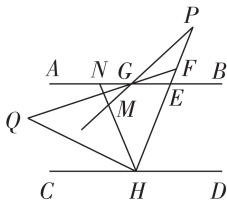
①若点 M 在 PG 的延长线上,如图(2).

因为 $AB \parallel CD$, 所以

$$\angle HEN = \angle PHD = 80^\circ.$$

因为 $\angle MNB + \angle PHM + \angle HEN = 180^\circ$,

$$\text{所以 } \angle MNB + \angle PHM = 180^\circ - \angle HEN = 100^\circ.$$



图(2)

②若点 M 在 PG 上,如图(3).

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle HEN = \angle PHD = 80^\circ$.

因为 $\angle MNB = 180^\circ - \angle HNE = \angle PHM + \angle HEN$, 所以 $\angle MNB - \angle PHM = \angle HEN = 80^\circ$.

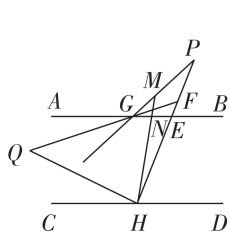
③若点 M 在 GP 的延长线上,如图(4).

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle HEN + \angle PHD = 180^\circ$,

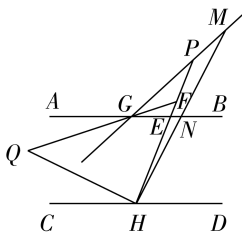
$$\text{所以 } \angle HEN = 180^\circ - \angle PHD = 100^\circ.$$

因为 $\angle HNE + \angle PHM + \angle HEN = 180^\circ$, $\angle MNB = \angle HNE$, 所以 $\angle MNB + \angle PHM = 180^\circ - \angle HEN = 80^\circ$.

综上所述, $\angle MNB$ 和 $\angle PHM$ 之间的数量关系是 $\angle MNB + \angle PHM = 100^\circ$ 或 $\angle MNB - \angle PHM = 80^\circ$ 或 $\angle MNB + \angle PHM = 80^\circ$.



图(3)



图(4)

课时2 平行线的判定方法2、3

刷基础

1. **C** 【解析】A 选项, 由 $\angle 1 = \angle 2$ 不能得到 $AB \parallel CD$, 故此选项不符合题意; B 选项, 由 $\angle 1 = \angle 2$ 不能得到 $AB \parallel CD$, 故此选项不符合题意; C 选项, 由 $\angle 1 = \angle 2$, 可根据内错角相等, 两直线平行, 得到 $AB \parallel CD$, 故此选项符合题意; D 选项, 由 $\angle 1 = \angle 2$, 可根据内错角相等, 两直线平行, 得到 $AC \parallel DB$, 故此选项不符合题意. 故选 C.

2. **110°** 【解析】因为 $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$, 所以 $a \parallel b$. 因为 $\angle 3 = 110^\circ$, 所以 $\angle 4 = \angle 3 = 110^\circ$. 故答案为 110° .

3. **B** 【解析】由 $\angle D + \angle B = 180^\circ$, 不能判定 $AB \parallel CD$, 故 A 不符合题意; 由 $\angle A + \angle D = 180^\circ$ 能判定 $AB \parallel CD$, 故 B 符合题意; 由 $\angle A = \angle B$ 不能判定 $AB \parallel CD$, 故 C 不符合题意; 由 $\angle C = \angle D$ 不能判定 $AB \parallel CD$, 故 D 不符合题意. 故选 B.

4. 【解】 $AB \parallel CD$. 理由如下:

因为 BE, DE 分别平分 $\angle ABD$ 和 $\angle BDC$,

$$\text{所以 } \angle 1 = \frac{1}{2} \angle ABD, \angle 2 = \frac{1}{2} \angle BDC,$$

$$\text{所以 } \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABD + \frac{1}{2} \angle BDC =$$

$$\frac{1}{2} (\angle ABD + \angle BDC) = 90^\circ,$$

所以 $\angle ABD + \angle BDC = 180^\circ$, 所以 $AB \parallel CD$.

思路分析

先由 $\angle 2 = \angle 1$ 得到 $AB \parallel CD$, 再由两直线平行, 同旁内角互补即可求出 $\angle ACD$ 的度数.

5. **C** 【解析】因为 $\angle 2 = \angle 1$, 所以 $AB \parallel CD$ (内错角相等, 两直线平行), 所以 $\angle A + \angle ACD = 180^\circ$. 因为 $\angle A = 50^\circ$, 所以 $\angle ACD = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

6. **35°** 【解析】因为 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补, 所以 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle ADC + \angle C = 180^\circ$. 又因为 $\angle A = \angle C$, 所以 $\angle ADC + \angle A = 180^\circ$, 所以 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle ABE = \angle E = 35^\circ$. 故答案为 35° .

7. 【解】(1) $CF \parallel BD$. 理由如下:

因为 $BC \parallel DE$, 所以 $\angle D + \angle CBD = 180^\circ$.

因为 $\angle D + \angle BCF = 180^\circ$, 所以 $\angle CBD = \angle BCF$, 所以 $CF \parallel BD$.

(2) 因为 $\angle D + \angle BCF = 180^\circ$, $\angle D = 140^\circ$, 所以 $\angle BCF = 40^\circ$. 因为 CF 平分 $\angle ACB$, 所以 $\angle ACB = 2 \angle BCF = 80^\circ$.

因为 $BC \parallel DE$, 所以 $\angle E = \angle ACB = 80^\circ$.

易错警示

本题乙的说法无法直接判断, 需借助甲的说法证明; 丙的说法容易看图认为 $\angle AEF = \angle EOH$ 而判断出错.

刷易错

8. **D** 【解析】因为 $\angle AEF + \angle CFE = 180^\circ$, 所以 $AB \parallel CD$, 故甲的说法对. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle AEF = \angle EFD$. 因为 $\angle 1 = \angle 2$, 所以 $\angle AEF - \angle 1 = \angle EFD - \angle 2$, 所以 $\angle GEF = \angle EFH$, 所以 $GE \parallel FH$, 故乙的说法对. 由已知条件无法得到 AB 与 GH 平行, 故丙的说法错误. 故选 D.

刷提升

1. **B** 【解析】由题意得, 在三角形 CDE 中, $\angle DCE = 90^\circ$, $\angle CDE = 45^\circ$, 在三角形 ABC 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$. 因为 $DE \perp AB$, 所以 $\angle EDA = 90^\circ$, 所以 $\angle A + \angle EDA = 180^\circ$, 所以 $DE \parallel AC$, 所以 $\angle ACD = \angle CDE = 45^\circ$, $\angle BFD = \angle ACB = 60^\circ$, 所以 $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE =$

$45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$, $\angle BCD = \angle ACB - \angle ACD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, 故 A、C、D 选项正确, B 选项错误. 故选 B.

2. **C** 【解析】A 选项中, 当 $\angle 1 = \angle 2$ 时, 由“内错角相等, 两直线平行”可得 $a \parallel b$; B 选项中, 由 $\angle 1 = \angle 2$ 且 $\angle 3 = \angle 4$ 可得 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$, 由“内错角相等, 两直线平行”或“同旁内角互补, 两直线平行”可得 $a \parallel b$; C 选项中, $\angle 1, \angle 2$ 和直线 b 没有关系, 故由 $\angle 1 = \angle 2$ 不能判定 a, b 互相平行; D 选项中, 由 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, 根据“同旁内角互补, 两直线平行”可得 $a \parallel b$. 故选 C.

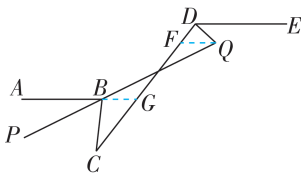
3. **①②③** 【解析】-----

序号	分析	结论
①	因为 $\angle EAD = \angle D$, $\angle B = \angle D$, 所以 $\angle EAD = \angle B$, 所以 $AD \parallel BC$	正确
②	因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle CKG = \angle AGK$. 因为 $\angle CKG = \angle CGK$, 所以 $\angle AGK = \angle CGK$, 即 GK 平分 $\angle AGC$	正确
③	因为 $\angle FGA$ 的余角比 $\angle DGH$ 大 16° , 所以 $90^\circ - \angle FGA = \angle DGH + 16^\circ$. 因为 $\angle DGH = \angle FGA$, 所以 $90^\circ - \angle FGA = \angle FGA + 16^\circ$, 所以 $\angle FGA = 37^\circ$, 所以 $\angle DGH = 37^\circ$	正确
④	设 $\angle AGM = \alpha$, $\angle MGK = \beta$, 所以 $\angle AGK = \angle AGM + \angle MGK = \alpha + \beta$. 因为 GK 平分 $\angle AGC$, 所以 $\angle CGK = \angle AGK = \alpha + \beta$. 因为 GM 平分 $\angle FGC$, 所以 $\angle FGM = \angle CGM$, 即 $\angle FGA + \angle AGM = \angle CGK + \angle MGK$, 所以 $37^\circ + \alpha = \alpha + \beta + \beta$, 解得 $\beta = 18.5^\circ$, 即 $\angle MGK = 18.5^\circ$	错误

思路分析

根据角的等量代换得 $\angle EAD = \angle B$, 利用平行线的判定方法 1 即可判断 ①; 由 ① 可得 $\angle CKG = \angle AGK$, 再根据角的等量代换得出 $\angle AGK = \angle CGK$ 即可判断 ②; 根据题意得 $90^\circ - \angle FGA = \angle DGH + 16^\circ$, $\angle DGH = \angle FGA$, 据此求出 $\angle DGH$ 的度数即可判断 ③; 设 $\angle AGM = \alpha$, $\angle MGK = \beta$, 利用角平分线的定义列式求出 $\angle MGK$ 的度数即可判断 ④.

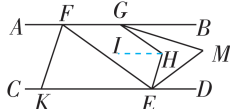
4. **48** 【解析】如图, 作 $QF \parallel DE$ 交 CD 于点 F , 延长 AB 交 CD 于点 G . 设 $\angle ABP = \alpha$, $\angle EDQ = \beta$, 则 $\angle CBP = 2\alpha$, $\angle CDQ = 2\beta$. 因为 $QF \parallel DE$, 所以 $\angle DQF = \angle EDQ = \beta$. 因为 $AB \parallel DE$, 所以 $AG \parallel QF$, 所以 $\angle FQB =$



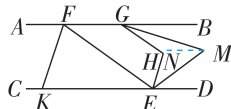
$\angle QBG = \angle ABP = \alpha$, 所以 $\angle DQB = \alpha + \beta$. 因为 $AB \parallel DE$, 所以 $\angle AGD = \angle EDG = 3\beta$, 所以 $\angle AGC = 180^\circ - \angle AGD = 180^\circ - 3\beta$. 因为 $\angle C = 180^\circ - \angle CBG - \angle AGC$, 所以 $\angle C = \angle ABC - \angle AGC = 3\alpha - (180^\circ - 3\beta) = 3(\alpha + \beta) - 180^\circ$. 因为 $\angle DQB - \angle C = 84^\circ$, 所以 $(\alpha + \beta) - [3(\alpha + \beta) - 180^\circ] = 84^\circ$, 所以 $\alpha + \beta = 48^\circ$, 即 $\angle DQB = 48^\circ$, 故答案为 48.

刷素养

5. 【解】(1) 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle AFE = \angle FED$. 因为 $\angle AGH = \angle FED$, 所以 $\angle AFE = \angle AGH$, 所以 $HG \parallel EF$. (2) ①如图(1), 过点 H 作 $HI \parallel AB$, 所以 $HI \parallel AB \parallel CD$, 所以 $\angle AFK = \angle EKF$, $\angle BGH = \angle IHG$, $\angle DEH = \angle IHE$. 因为 $\angle KFE : \angle MGH = m : n = 7 : 3$, 所以设 $\angle KFE = 7x$, $\angle MGH = 3x$. 因为 FK 平分 $\angle AFE$, GM 平分 $\angle HGB$, 所以 $\angle AFK = \angle EFK = 7x$, $\angle BGH = 2\angle MGH = 6x$, 所以 $\angle AFE = 14x$, $\angle AGH = 180^\circ - \angle BGH = 180^\circ - 6x$. 由(1)可知 $\angle AFE = \angle AGH$, 所以 $14x = 180^\circ - 6x$, 解得 $x = 9^\circ$, 所以 $\angle IHG = 6x = 54^\circ$, $\angle EKF = 7x = 63^\circ$. 因为 $EH \parallel KF$, 所以 $\angle IHE = \angle DEH = \angle EKF = 63^\circ$, 所以 $\angle GHE = \angle IHG + \angle IHE = 54^\circ + 63^\circ = 117^\circ$.



图(1)



图(2)

②如图(2), 过点 M 作 $MN \parallel AB$. 由题意可设 $\angle KFE = my$, $\angle MGH = ny$. 因为 $AB \parallel CD$, FK 平分 $\angle AFE$, 所以 $\angle EKF = \angle KFE = \angle AFK = my$, $\angle AFE = 2my$. 因为 $EH \parallel KF$, 所以 $\angle DEH = \angle EKF = my$. 因为 EM 平分 $\angle HED$, 所以 $\angle DEM = \frac{1}{2} \angle DEH = \frac{my}{2}$. 因为 $MN \parallel AB$, $AB \parallel CD$, 所以 $MN \parallel AB \parallel CD$,

所以 $\angle NME = \angle DEM = \frac{my}{2}$.

因为 GM 平分 $\angle HGB$, 所以 $\angle BGM = \angle MGH = ny$, $\angle BGH = 2ny$,

所以 $\angle AGH = 180^\circ - \angle BGH = 180^\circ - 2ny$.

因为 $MN \parallel AB$, 所以 $\angle GMN = \angle BGM = ny$,

所以 $\angle GME = \angle GMN + \angle NME$,

即 $ny + \frac{my}{2} = 54^\circ$.

由(1)可知 $\angle AGH = \angle AFE$,

所以 $180^\circ - 2ny = 2my$, 即 $\begin{cases} ny + \frac{my}{2} = 54^\circ, \\ 2my = 180^\circ - 2ny, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} my = 72^\circ, \\ ny = 18^\circ, \end{cases}$

所以 $m:n = my:ny = 72^\circ:18^\circ = 4:1$.

(3) 过点 H 作 $HK \parallel AB$, 过点 M 作 $MN \parallel AB$, 如图(3).

设 $\angle FGH = 2\alpha$, $\angle HED = 2\beta$, 易得 $\angle FGH = \angle HED = 2\alpha$,

$\angle FHK = 180^\circ - \angle HED = 180^\circ - 2\beta$, 所以 $\angle EHG = \angle FHK - \angle KHG = 180^\circ - 2\beta - 2\alpha$.

因为 $\angle AGH$ 的平分线的反向延长线和 $\angle DEH$ 的平分线相交于点 M , 所以 $\angle BGM = \angle AGQ = \frac{1}{2} \angle AGH = \alpha$, $\angle MED = \frac{1}{2} \angle FED = \beta$,

易得 $\angle GME = \angle BGM + \angle DEM = \alpha + \beta$,

所以 $\angle EHG + 2 \angle GME = 180^\circ - 2\beta - 2\alpha + 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$.

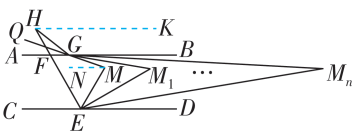
因为 $\angle BGM$ 的平分线和 $\angle DEM$ 的平分线相交于点 M_1 , 所以易得 $\angle GM_1E = \angle BGM_1 + \angle DEM_1 = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta$, 所以 $\angle EHG + 4 \angle GM_1E =$

$180^\circ - 2\beta - 2\alpha + 4\left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta\right) = 180^\circ$,

同理可得 $\angle EHG + 8 \angle GM_2E = 180^\circ - 2\beta - 2\alpha + 8\left(\frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{4} \beta\right) = 180^\circ, \dots$,

由规律可得 $\angle EHG + 2^{n+1} \angle GM_nE = 180^\circ - 2\beta - 2\alpha + 2^{n+1}\left(\frac{1}{2^n} \alpha + \frac{1}{2^n} \beta\right) = 180^\circ$.

综上, $\angle EHG + 2 \angle GME = 180^\circ$, $\angle EHG +$



图(3)

思路分析

过点 M 作 $ME \parallel AB$, 得 $AB \parallel ME \parallel CD$, 利用平行线的性质得角的等量关系, 即可求 $\angle BMD$ 的度数.

关键点拨

本题综合考查了平行线的性质和角平分线的定义, 运用“猪蹄模型”的结论总结规律即可求解.

$$2^{n+1} \angle GM_nE = 180^\circ.$$

大招专题2 平行线中的拐点模型



刷难关

大招解读 | 猪蹄模型(M型)与锯齿模型

	① 已知: $AM \parallel BN$, 结论: $\angle APB = \angle A + \angle B$; ② 已知: $\angle APB = \angle A + \angle B$, 结论: $AM \parallel BN$
	已知: $AM \parallel BN$, 结论: $\angle P_1 + \angle P_3 = \angle A + \angle B + \angle P_2$
	已知: $AM \parallel BN$, 结论: $\angle P_1 + \angle P_3 + \dots + \angle P_{2n+1} = \angle A + \angle B + \angle P_2 + \dots + \angle P_{2n}$

1. C

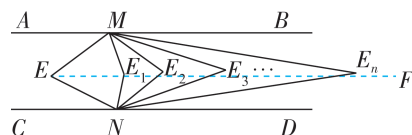
【解析】过点 M 作 $ME \parallel AB$, 如图. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \parallel ME \parallel CD$, 所以 $\angle ABM = \angle BME = 30^\circ$, $\angle CDM = \angle DME = 45^\circ$, 所以 $\angle BMD = \angle BME + \angle DME = 75^\circ$. 故选 C.

2. C

【解析】如图, 分别过点 C, D 作 AB 的平行线 CG, DH . 因为 $AB \parallel EF$, 所以 $AB \parallel CG \parallel DH \parallel EF$, 所以 $\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = \angle CDH$, $\angle HDE = \gamma$. 因为 $\angle 2 = 90^\circ - \angle 1 = 90^\circ - \alpha$, $\angle CDH = \beta - \angle HDE = \beta - \gamma$, 所以 $90^\circ - \alpha = \beta - \gamma$, 所以 $\alpha + \beta - \gamma = 90^\circ$. 故选 C.

3. (1) 148.5°

(2) $\frac{297^\circ}{2^n}$ 【解析】如图, 过点 E 作 $EF \parallel AB$.



因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \parallel CD \parallel EF$, 所以 $\angle BME = 180^\circ - \angle MEF$, $\angle END = 180^\circ - \angle NEF$, 所以 $\angle BME + \angle END = 360^\circ - (\angle MEF + \angle NEF) = 360^\circ - \angle MEN = 297^\circ$. 因为 $\angle BME$ 与 $\angle DNE$ 的平分线相交于点 E_1 , 所以 $\angle BME_1 = \frac{1}{2} \angle BME$, $\angle DNE_1 = \frac{1}{2} \angle DNE$, 所以

$\angle BME_1 + \angle DNE_1 = \frac{1}{2} \angle BME + \frac{1}{2} \angle DNE =$
 $\frac{1}{2} (\angle BME + \angle DNE) = \frac{297^\circ}{2}$. 由“猪蹄模型”结
 论易得 $\angle ME_1N = \angle BME_1 + \angle DNE_1 = \frac{297^\circ}{2}$, 同
 理可得 $\angle ME_2N = \frac{297^\circ}{2^2}$, ..., 归纳可得
 $\angle ME_nN = \frac{297^\circ}{2^n}$, 即 $\angle ME_1N = \frac{297^\circ}{2^1} = 148.5^\circ$,
 $\angle ME_nN = \frac{297^\circ}{2^n}$. 故答案为 (1) 148.5° , (2) $\frac{297^\circ}{2^n}$.

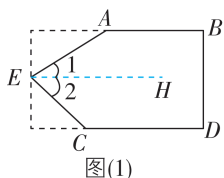
大招解读 | 铅笔头模型

	① 已知: $AM \parallel BN$, 结论: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$; ② 已知: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$, 结论: $AM \parallel BN$
	已知: $AM \parallel BN$, 结论: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 540^\circ$
	已知: $AM \parallel BN$, 结论: $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n = 180^\circ(n-1)$

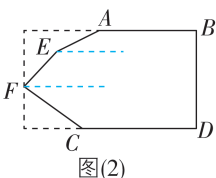
4. C 【解析】如图, 过点 A 作
 $AB \parallel l_1$. 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以
 $AB \parallel l_1 \parallel l_2$, 所以 $\angle 1 + \angle 4 =$
 180° , $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$.
 因为 $\angle 1 = 105^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$, 所以 $\angle 4 = 75^\circ$,
 $\angle 5 = 40^\circ$. 因为 $\angle 4 + \angle 5 + \angle 3 = 180^\circ$, 所以
 $\angle 3 = 65^\circ$. 故选 C.

5. (1) 360 (2) 540 (3) 720 (4) $180n$

【解析】(1) 过 E 作 $EH \parallel AB$, 如图(1). 因为原
 四边形是长方形, 所以 $AB \parallel CD$. 又因为 $EH \parallel$
 AB , 所以 $CD \parallel EH$, $\angle BAE + \angle 1 = 180^\circ$, 所以
 $\angle 2 + \angle DCE = 180^\circ$, 所以 $\angle BAE + \angle 1 + \angle 2 +$
 $\angle ECD = 360^\circ$. 又因为 $\angle 1 + \angle 2 = \angle AEC$,
 所以 $\angle BAE + \angle AEC + \angle ECD = 360^\circ$.



图(1)

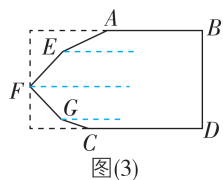


图(2)

(2) 过 E, F 分别作 AB 的平行线, 如图(2)所

示, 方法同(1) 可得 $\angle BAE + \angle AEF + \angle EFC +$
 $\angle FCD = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$.

(3) 过 E, F, G 分别作 AB
 的平行线, 如图(3) 所示,
 方法同(1) 可得 $\angle BAE +$
 $\angle AEF + \angle EFG + \angle FGC +$
 $\angle GCD = 180^\circ \times 4 = 720^\circ$.



图(3)

(4) 由上可得一般规律, 剪 n 刀, 得到 $(n+1)$
 个角, 那么这 $(n+1)$ 个角的和是 $180n^\circ$.
 故答案为 (1) 360, (2) 540, (3) 720, (4) $180n$.

大招解读 | 牛角模型

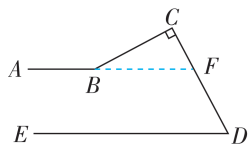
已知: $AB \parallel CD$, 结 论: $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	已知: $AB \parallel CD$, 结论: $\angle 1 + \angle 3 - \angle 2 = 180^\circ$

归纳总结

延长线构造三
 角形也是平行
 线求角度问题
 中常见的辅助
 线作法.

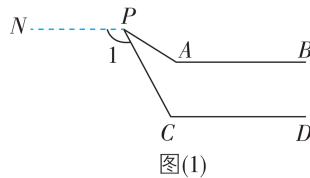
6. 152° 【解析】 延长 AB

交 CD 于点 F , 如图. 因
 为 $AB \parallel DE$, $\angle D = 62^\circ$,
 所以 $\angle D = \angle BFC =$
 62° . 因为 $\angle C = 90^\circ$, 所以 $\angle CBF = 180^\circ - 90^\circ -$
 $62^\circ = 28^\circ$, 所以 $\angle ABC = 180^\circ - 28^\circ = 152^\circ$.

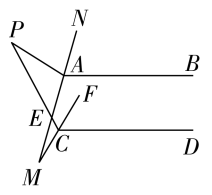


7. 【解】 (1) 如图(1), 过点 P 作 $PN \parallel AB$, 所以
 $\angle A = \angle APN$.

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $PN \parallel CD$,
 所以 $\angle C = \angle 1$,
 所以 $\angle APC = \angle APN - \angle 1$,
 所以 $\angle APC = \angle A - \angle C$,
 即 $\angle APC = \angle BAP - \angle PCD$.



图(1)



图(2)

(2) 根据题意, 补全图形如图(2), 设 MN 交
 PC 于 E .

因为 AN 平分 $\angle BAP$, CF 平分 $\angle PCD$,
 所以 $\angle PAN = \frac{1}{2} \angle BAP$, $\angle FCE = \frac{1}{2} \angle PCD$.

因为 $\angle PAN = 180^\circ - \angle PAE = \angle PEN + \angle APC$,
 $\angle FCE = 180^\circ - \angle MCE = \angle AMC + \angle CEM$, 且

$\angle PEN = \angle CEM$, 所以 $\angle PAN - \angle APC = \angle FCE - \angle AMC$, 所以 $\angle APC = \angle PAN - \angle FCE + \angle AMC$, 所以 $\angle APC = \frac{1}{2} \angle BAP - \frac{1}{2} \angle PCD + \angle AMC = \frac{1}{2} (\angle BAP - \angle PCD) + \angle AMC$.

由(1)知 $\angle APC = \angle BAP - \angle PCD$,

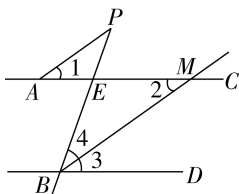
所以 $\angle APC = \frac{1}{2} \angle APC + \angle AMC$, 即 $\angle AMC = \frac{1}{2} \angle APC$ (或 $\angle APC = 2 \angle AMC$).

大招解读 | 羊角模型

已知: $AB \parallel DE$, 结论: $\alpha = \gamma - \beta$	已知: $AB \parallel DE$, 结论: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

8. 【解】过点 E 作 $EF \parallel CD$, 如图. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle B = \angle BOD$. 因为 $EF \parallel CD$, 所以 $\angle BOD = \angle BEF$, $\angle D = \angle DEF$, 所以 $\angle BEF = \angle BED + \angle DEF = \angle BED + \angle D$, 所以 $\angle BOD = \angle BED + \angle D$ (等量代换), 即 $\angle B = \angle BED + \angle D$.

9. 【解】(1) 如图所示, BM 即为所作.



(2) 如图, 因为 $AC \parallel BD$, 所以 $\angle 2 = \angle 3$. 因为 $AP \parallel BM$, 所以 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle P = \angle 4$, 所以 $\angle 1 = \angle 3$, 所以 $\angle P = \angle 4 = \angle PBD - \angle 3 = \angle PBD - \angle 1 = \angle PBD - \angle PAC$, 所以 $\angle PBD - \angle PAC = \angle P$.

大招解读 | 蛇形模型

已知: $AB \parallel DE$, 结论: $\alpha + \gamma = \beta + 180^\circ$

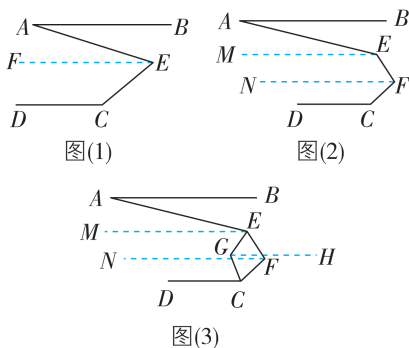
10. D 【解析】如图, 过点 E 作 $EF \parallel CD$. 因为

关键点拨

通过作平行线将要求的角分成两个角, 再根据平行线的性质分别求出这两个角的度数即可得解.

$\angle C = 20^\circ$, $EF \parallel CD$, 所以 $\angle C = \angle FEC = 20^\circ$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $EF \parallel AB$, 所以 $\angle B + \angle BEF = 180^\circ$, 即 $125^\circ + \angle BEF = 180^\circ$, 所以 $\angle BEF = 55^\circ$, 所以 $\angle \alpha = \angle BEF + \angle FEC = 75^\circ$. 故选 D.

11. 【解】(1) $\angle AEC = 180^\circ - \angle C + \angle A$. 理由如下: 过点 E 作 $EF \parallel AB$, 如图(1), 则 $AB \parallel EF \parallel CD$, 所以 $\angle A = \angle AEF$, $\angle C + \angle CEF = 180^\circ$. 又因为 $\angle AEC = \angle AEF + \angle CEF$, 所以 $\angle AEC = 180^\circ - \angle C + \angle A$.



(2) ①分别过点 E, F 作 $EM \parallel AB, FN \parallel AB$, 如图(2), 则 $AB \parallel EM \parallel FN \parallel CD$, 所以 $\angle A = \angle AEM$, $\angle MEF + \angle EFN = 180^\circ$, $\angle NFC + \angle DCF = 180^\circ$. 又因为 $\angle AEF = \angle AEM + \angle MEF$, $\angle EFC = \angle EFN + \angle CFN$, 所以 $\angle AEF + \angle C = \angle A + 180^\circ - \angle EFN + 180^\circ - \angle NFC = \angle A + 360^\circ - \angle EFC = 276^\circ$, 所以 $\angle AEF + \angle C = 276^\circ$.

② $\angle EGC + \frac{1}{2} \angle EFC = 172^\circ$. 理由: 分别过点 E, F, G 作 $EM \parallel AB, FN \parallel AB, GH \parallel AB$, 如图(3), 则 $GH \parallel AB \parallel EM \parallel FN \parallel CD$, 所以 $\angle EGH = \angle MEG$, $\angle HGC = \angle DCG$, $\angle A = \angle AEM$, 所以 $\angle EGH = \angle MEG = \angle AEG - \angle AEM = \angle AEG - \angle A$. 由①可得 $\angle AEF + \angle DCF = \angle A + 360^\circ - \angle EFC$. 因为 $\angle AEF$ 和 $\angle DCF$ 的平分线交于点 G , 所以 $\angle AEG = \angle GEF = \frac{1}{2} \angle AEF$,

$\angle DCG = \angle GCF = \frac{1}{2} \angle DCF$, 所以 $\angle AEG + \angle DCG = \frac{1}{2} (\angle AEF + \angle DCF) = \frac{1}{2} (\angle A + 360^\circ - \angle EFC) = \frac{1}{2} \angle A + 180^\circ - \frac{1}{2} \angle EFC$.

因为 $\angle EGC = \angle EGH + \angle HGC = \angle AEG - \angle A +$

关键点拨

(2) ②综合考查了平行线的性质和角平分线的定义, 熟练掌握并运用是解题的关键.

关键点拨

(2) 运用平行线的性质得出相等的角, 然后根据角的和差关系列式, 并进行等量代换即可得出结论.

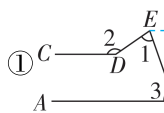
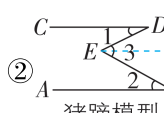
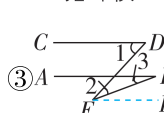
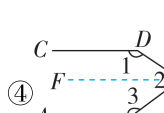
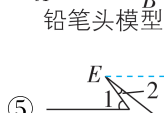
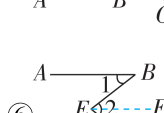
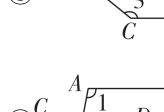
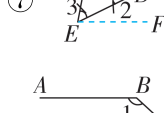
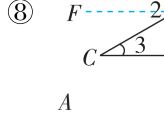
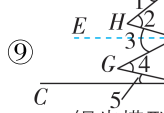
$$\angle DCG = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle EFC - \frac{1}{2} \angle A = 172^\circ - \frac{1}{2} \angle EFC, \text{ 所以 } \frac{1}{2} \angle EFC + \angle EGC = 172^\circ.$$

大招专题3 平行线中常见的辅助线

刷难关

大招解读 过“拐点”作平行线

平行线问题中遇到拐点时,通常过这个拐点作一条直线与已知两条平行线平行,然后利用平行线的性质进行角度的转换与计算.

- ①  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
结论: $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2$.
- ②  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
猪蹄模型
结论: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$.
- ③  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
结论: $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$.
- ④  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
铅笔头模型
结论: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$.
- ⑤  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
结论: $\angle 1 - \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.
- ⑥  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
结论: $\angle 2 + \angle 3 - \angle 1 = 180^\circ$.
- ⑦  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
结论: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.
- ⑧  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel CD$ (或 AB).
结论: $\angle 1 + \angle 2 - \angle 3 = 180^\circ$.
- ⑨  已知: $AB \parallel CD$.
作 $EF \parallel AB$ (或 CD).
锯齿模型
结论: $\angle 2 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 3 + \angle 5$.
- ⑩  已知: $AB \parallel CD$.
锯齿模型拓展
结论: $\angle E + \angle G + \angle I + \angle M = \angle B + \angle F + \angle H + \angle K + \angle D$.

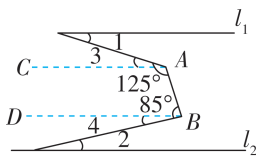
刷有所得

此题中作辅助线的方法在平行线问题中较为常用,其目的是构造平行线被第三条直线所截形成的“三线八角”,然后利用平行线的性质去进行角的转换,从而解题.

刷有所得

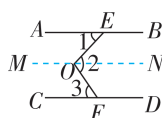
当一组平行线间有一个拐点时,可以延长线段,也可以过拐点作平行线.当一组平行线间有多个拐点时,直接过拐点作平行线即可.

过点 B 作 l_2 的平行线 BD , 则 $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$. 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $AC \parallel BD$, 所以 $\angle CAB + \angle ABD = 180^\circ$, 所以 $\angle 3 + \angle 4 = 125^\circ + 85^\circ - 180^\circ = 30^\circ$, 所以 $\angle 1 + \angle 2 = 30^\circ$. 因为 $\angle 1 = \angle 2 + 4^\circ$, 所以 $\angle 1 = 17^\circ$.

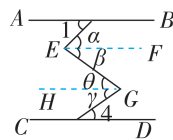


2. 【解】(1) $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$.

理由: 如图(1), 过点 O 作 $MN \parallel AB$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $MN \parallel AB \parallel CD$, 所以 $\angle 1 = \angle EON$, $\angle 3 = \angle NOF$, 所以 $\angle 1 + \angle 3 = \angle EON + \angle NOF = \angle EOF$, 即 $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$.



图(1)



图(2)

(2) $\angle 1 + \angle 3 + \dots + \angle 2n-1 = \angle 2 + \angle 4 + \dots + \angle 2n$.

理由: 如图(2), 取有限个角, 并作 $EF \parallel AB$, 则 $\angle 1 = \angle \alpha$, 作 $GH \parallel EF$, 则 $GH \parallel AB$, $\angle \theta = \angle \beta$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $CD \parallel GH$, 所以 $\angle \gamma = \angle 4$, 由此推得 $\angle 1 + \angle \theta + \angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta + \angle 4$, 由此推得 $\angle 1 + \angle 3 + \dots + \angle 2n-1 = \angle 2 + \angle 4 + \dots + \angle 2n$.

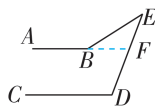
大招解读 延长截线

已知 $AB \parallel CD$.

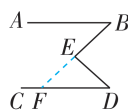
如图(1), 延长 AB 交 ED 于 F , 则 $\angle ABE = 180^\circ - \angle EBF = \angle E + \angle BFE = \angle E + \angle D$.

如图(2), 延长 BE 交 CD 于 F , 则 $\angle BED = 180^\circ - \angle DEF = \angle EFD + \angle D = \angle B + \angle D$.

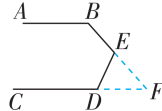
如图(3), 延长 BE , CD 交于点 F , 则 $\angle BED = 180^\circ - \angle DEF = \angle F + \angle EDF = 180^\circ - \angle B + \angle 180^\circ - \angle CDE = 360^\circ - \angle B - \angle CDE$.



图(1)

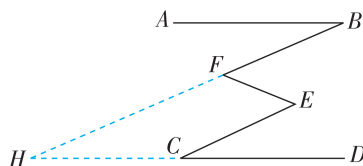


图(2)



图(3)

3. 【解】如图, 延长 BF 交 DC 的延长线于点 H .



因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle ABF = \angle H$.

因为 $\angle ABF = \angle DCE$, 所以 $\angle H = \angle DCE$,

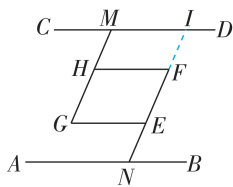
所以 $BH \parallel CE$, 所以 $\angle BFE = \angle FEC$.

4. 【解】(1) 因为 $HF \parallel GE$, 所以 $\angle HFE + \angle GEF =$

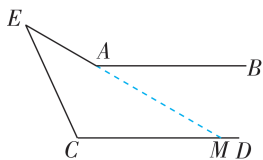
1. 17° 【解析】如图, 过点 A 作 l_1 的平行线 AC ,

180° . 又因为 $\angle HGE = \angle HFE$, 所以 $\angle HGE + \angle GEF = 180^\circ$, 所以 $GH \parallel EF$.

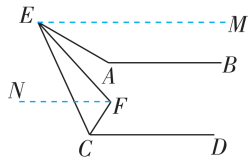
(2) 如图, 延长 EF 交 CD 于点 I . 因为 $GH \parallel EF$, 所以 $\angle CMH = \angle MIF$. 又因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle MIF = \angle BNE$, 所以 $\angle CMH = \angle BNE$.



5. 【解】(1) 如图(1), 延长 EA 交 CD 于点 M . 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle EAB = \angle EMD$. 因为 $\angle EMD = 180^\circ - \angle EMC = \angle C + \angle E$, 所以 $\angle EAB = \angle C + \angle E$, 所以 $\angle EAB - \angle C = \angle E$.



图(1)



图(2)

(2) 如图(2), 过点 E 作 $EM \parallel AB$, 过点 F 作 $FN \parallel AB$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $EM \parallel AB \parallel FN \parallel CD$, 所以 $\angle NFC = \angle FCD$, $\angle EFN = \angle FEM$, $\angle AEM + \angle A = 180^\circ$. 因为 EF 平分 $\angle AEC$, CF 平分 $\angle ECD$, 所以 $\angle AEF = \frac{1}{2} \angle AEC$, $\angle FCD = \frac{1}{2} \angle ECD$, 所以 $\angle FEM = \angle AEF + \angle AEM = \frac{1}{2} \angle AEC + 180^\circ - \angle A$, $\angle NFC = \frac{1}{2} \angle ECD$, 所以 $\angle EFN = \angle FEM = \frac{1}{2} \angle AEC + 180^\circ - \angle A$, 所以 $\angle EFN + \angle NFC = \frac{1}{2} \angle AEC + \frac{1}{2} \angle ECD + 180^\circ - \angle A = 105^\circ$, 即 $\angle AEC + \angle ECD = 2\angle A - 150^\circ$. 由(1)知, $\angle A - \angle ECD = \angle AEC$, 所以 $\angle AEC + \angle ECD = \angle A$, 所以 $\angle A = 2\angle A - 150^\circ$, 所以 $\angle A = 150^\circ$.

4.5 垂线

课时1 垂线

刷基础

1. B 【解析】因为 $EO \perp CD$, 所以 $\angle COE = 90^\circ$. 因为 $\angle 1 + \angle COE + \angle 2 = 180^\circ$, 所以 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 - \angle COE = 180^\circ - 54^\circ - 90^\circ = 36^\circ$.

2. C 【解析】两条直线相交构成四个角. ①有一个角是直角, 能判定这两条直线互相垂直, 正确; ②有一对对顶角相等, 不能判定两条直线

易错警示
本题易误填垂直, 错在想当然认为垂直具有传递性.

关键点拨
利用垂直得到直角, 再根据角的和差关系即可求解.

互相垂直, 错误; ③有一组邻补角相等, 则这两个角都为 90° , 能判定两条直线互相垂直, 正确; ④有三个角都相等, 则每个角都等于 90° , 能判定两条直线互相垂直, 正确. 所以能判定这两条直线互相垂直的有①③④, 共有 3 种, 故选 C.

3. 50 【解析】因为 $OE \perp CD$, 所以 $\angle DOE = 90^\circ$. 因为 $\angle 1 = 40^\circ$, 所以 $\angle AOD = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, 故答案为 50.

4. 【解】(1) 因为 OF 平分 $\angle AOC$, $\angle AOF = 64^\circ$, 所以 $\angle AOC = 2\angle AOF = 2 \times 64^\circ = 128^\circ$. 因为 $OE \perp AB$, 所以 $\angle AOE = 90^\circ$, 所以 $\angle COE = \angle AOC - \angle AOE = 128^\circ - 90^\circ = 38^\circ$. (2) 因为 $\angle AOF : \angle COE = 3 : 2$, 所以设 $\angle AOF = 3x$, $\angle COE = 2x$. 因为 OF 平分 $\angle AOC$, 所以 $\angle FOC = \angle AOF = 3x$, 所以 $\angle EOF = \angle FOC - \angle EOC = x$. 因为 $OE \perp AB$, 所以 $\angle AOE = 90^\circ$, 所以 $\angle AOE = \angle AOF + \angle EOF = 3x + x = 4x = 90^\circ$, 所以 $x = 22.5^\circ$, 故 $\angle EOF$ 的度数为 22.5° .

5. D 【解析】因为 $l_1 \parallel l_2$, $a \perp l_2$, 所以 $a \perp l_1$. 因为 $b \perp l_1$, $c \perp l_1$, 所以与直线 l_1 垂直的直线是直线 a, b, c .

6. 44° 【解析】因为 $EF \perp AB$, 所以 $\angle AEF = 90^\circ$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle EFD = \angle AEF = 90^\circ$, 所以 $\angle EFH = 90^\circ - \angle DFH = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$. 故答案为 44° .

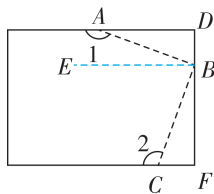
7. 【解】因为 $\angle AED = \angle ABC$, 所以 $DE \parallel BC$, 所以 $\angle 1 = \angle 3$. 又因为 $\angle 1 = \angle 2$, 所以 $\angle 2 = \angle 3$, 所以 $BD \parallel FG$. 因为 $AC \perp FG$, 所以 $\angle 5 = 90^\circ$. 因为 $BD \parallel FG$, 所以 $\angle 4 = \angle 5 = 90^\circ$, 所以 $CD \perp BD$.

刷易错

8. 平行 【解析】画图即可得直线 a 与 c 的位置关系是平行.

刷提升

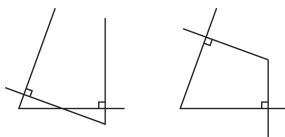
1. B 【解析】如图, 过点 B 作 $BE \parallel AD$, 所以 $\angle ABE + \angle 1 = 180^\circ$. 因为 $CF \parallel AD$, 所以 $CF \parallel BE \parallel AD$, 所以 $\angle CBE + \angle 2 = 180^\circ$, 所以 $\angle 1 + \angle ABE + \angle CBE + \angle 2 = 360^\circ$, 所以 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 360^\circ$. 因为 $AB \perp BC$, 所以 $\angle ABC = 90^\circ$. 因为 $\angle 1 = 160^\circ$, 所以 $\angle 2$ 的度数为 110° . 故选 B.



2. A 【解析】根据垂线及平行线的性质可知, $a_1 \perp a_2, a_1 \parallel a_3, a_1 \perp a_4, \dots$, 观察可得规律: 当 n 为奇数时 a_n 与 a_1 平行; 当 n 为偶数时 a_n 与 a_1 垂直, 所以 $a_1 \perp a_{2008}$. 故选 A.

3. 40° 【解析】过 F 作 $FM \parallel AD$, 交 AB 于 M , 如图. 因为四边形 $ABCD$ 是长方形, 所以 $AD \parallel BC$, 所以 $AD \parallel BC \parallel FM$, 所以 $\angle DGF = \angle GFM$, $\angle BEF + \angle EFM = 180^\circ$. 因为 $\angle BEF = 130^\circ$, 所以 $\angle EFM = 50^\circ$. 因为 $EF \perp GF$, 所以 $\angle EFG = \angle EFM + \angle GFM = 90^\circ$. 因为 $\angle EFM = 50^\circ$, 所以 $\angle GFM = 40^\circ$, 所以 $\angle FGD = 40^\circ$, 故答案为 40° .

4. 70°或 110° 【解析】因为同一平面内的两个角的两边互相垂直(如图所示), 所以这两个角互补或相等. 因为其中一个角的度数为 70° , 所以另一个角的度数为 70° 或 110° , 故答案为 70° 或 110° .

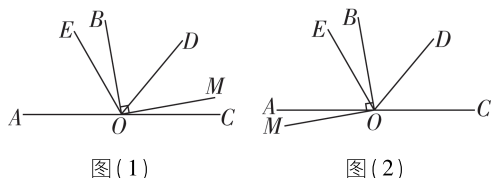


5. 110°或 70° 【解析】分两种情况进行讨论:

①如图(1)所示, OM 在 AC 上方.

因为 OD 平分 $\angle BOC$, 所以 $\angle COD = \angle BOD$.

因为 $4\angle BOE + \angle BOC = 180^\circ$, $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$, 所以 $\angle AOB = 4\angle BOE$, 即 $\angle AOE = 3\angle BOE$. 设 $\angle BOE = \alpha$, 则 $\angle AOE = 3\alpha$, $\angle BOD = 70^\circ - \alpha = \angle COD$. 因为 $\angle AOC$ 为平角, 所以 $\angle AOE + \angle DOE + \angle COD = 180^\circ$, 即 $3\alpha + 70^\circ + 70^\circ - \alpha = 180^\circ$, 解得 $\alpha = 20^\circ$, 所以 $\angle BOE = 20^\circ$. 又因为 $OM \perp OB$, 所以 $\angle MOB = 90^\circ$, 所以 $\angle MOE = \angle BOE + \angle MOB = 20^\circ + 90^\circ = 110^\circ$.



②如图(2)所示, OM 在 AC 下方. 同理可得, $\angle BOE = 20^\circ$. 又因为 $OM \perp OB$, 所以 $\angle MOB = 90^\circ$, 所以 $\angle MOE = \angle MOB - \angle BOE = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

综上所述, $\angle MOE$ 的度数为 110° 或 70° .

故答案为 110° 或 70° .

思路分析

画图分析可知, 同一平面内的两个角的两边互相垂直, 则这两个角互补或相等, 再根据其中一个角为 70° , 即可求得另一个角的度数.

易错警示

本题由于题目没有给出图形, 所以注意分类讨论, 不要漏解.

6. 【解】(1) 因为 $OE \perp CD$, 所以 $\angle COE = 90^\circ$, 即 $\angle AOC + \angle AOE = 90^\circ$.

因为 $\angle BOD = 27^\circ 44' = \angle AOC$, 所以 $\angle AOE = 90^\circ - 27^\circ 44' = 62^\circ 16'$.

(2) 因为 $OE \perp CD$, 所以 $\angle COE = \angle DOE = 90^\circ$, 即 $\angle AOC + \angle AOE = \angle DOF + \angle EOF = 90^\circ$.

因为 $\angle EOF = \angle AOE$, 所以 $\angle AOC = \angle DOF$.

又因为 $\angle AOC = \angle BOD$, 所以 $\angle BOD = \angle DOF$, 即 OD 是 $\angle BOF$ 的平分线.

(3) 如图(1), $\angle COG + \angle AOE = 180^\circ$. 理由如下:

因为 $OG \perp AB$, 所以 $\angle BOG = 90^\circ$,

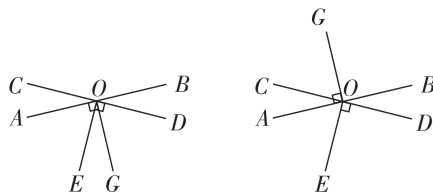
即 $\angle DOG + \angle BOD = 90^\circ$.

因为 $OE \perp CD$.

所以 $\angle COE = 90^\circ$, 即 $\angle AOC + \angle AOE = 90^\circ$.

因为 $\angle AOC = \angle BOD$, 所以 $\angle AOE = \angle DOG$.

因为 $\angle COG + \angle DOG = 180^\circ$, 所以 $\angle COG + \angle AOE = 180^\circ$.



图(1)

图(2)

如图(2), $\angle COG = \angle AOE$. 理由如下:

因为 $OE \perp CD$, 所以 $\angle COE = 90^\circ = \angle AOC + \angle AOE$, 所以 $\angle AOE = 90^\circ - \angle AOC$.

因为 $OG \perp AB$, 所以 $\angle AOG = 90^\circ = \angle AOC + \angle COG$, 所以 $\angle COG = 90^\circ - \angle AOC$, 所以 $\angle COG = \angle AOE$.

刷素养

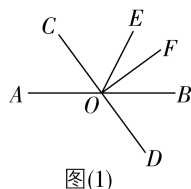
7. 【解】(1) 因为 $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$, $\angle AOC = 40^\circ$, 所以 $\angle BOC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. 因为 OE 平分 $\angle BOC$, 所以 $\angle COE = \frac{1}{2} \angle BOC = 70^\circ$. 因为 $\angle DOE + \angle COE = 180^\circ$, 所以 $\angle DOE = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

(2) 当 OF 在 $\angle BOC$ 内部时, 如图(1)所示.

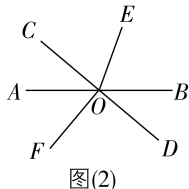
因为 $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$, $\angle AOC = x^\circ$, 所以 $\angle BOC = (180 - x)^\circ$. 因为 OE 平分 $\angle BOC$,

所以 $\angle COE = \frac{1}{2} \angle BOC = \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^\circ$. 因为 $OF \perp OC$, 所以 $\angle COF = 90^\circ$, 所以 $\angle EOF =$

$90^\circ - \angle COE = 90^\circ - \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^\circ = \frac{1}{2}x^\circ$.



图(1)



图(2)

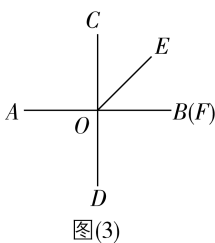
当 OF 在 $\angle AOD$ 内部时,如图(2)所示.

因为 $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$, $\angle AOC = x^\circ$, 所以 $\angle BOC = (180 - x)^\circ$. 因为 OE 平分 $\angle BOC$, 所以 $\angle COE = \frac{1}{2} \angle BOC = \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^\circ$. 因为 $OF \perp OC$, 所以 $\angle COF = 90^\circ$, 所以 $\angle EOF = 90^\circ + \angle COE = 90^\circ + \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^\circ = \left(180 - \frac{1}{2}x\right)^\circ$.

综上所述, $\angle EOF = \frac{1}{2}x^\circ$ 或 $180^\circ - \frac{1}{2}x^\circ$.

(3) $\angle EOF$ 可能和 $\angle DOE$ 互补.

理由如下: 如图(3), 当 $AB \perp CD$, 且 OF 与 OB 重合时, $\angle BOC = \angle BOD = 90^\circ$. 因为 OE 平分 $\angle BOC$, 所以 $\angle BOE = \frac{1}{2} \angle BOC = 45^\circ$, 即 $\angle EOF =$



图(3)

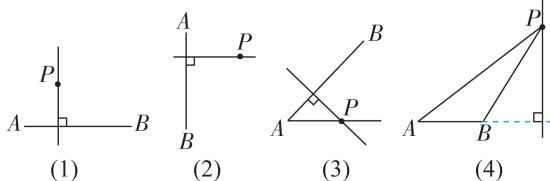
45° , 所以 $\angle DOE = \angle BOD + \angle BOE = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, 所以 $\angle EOF + \angle DOE = 180^\circ$, 即 $\angle EOF$ 和 $\angle DOE$ 互补.

课时2 垂线的基本事实及垂线段

刷基础

1. **C** 【解析】在同一平面内,过一点有且只有一条直线与已知直线垂直,其中“过一点”是指过点 O , 既然过一点 O 有 OM, ON 都与直线 a 垂直, 那么 OM, ON 就一定是一条直线, 即重合.

2. 【解】如图所示:



3. **C** 【解析】根据题意, 当 $CD \perp AB$ 时 CD 取得最小值, 此时 $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$. 当点 D 与点 A 重合时 CD 取得最大值, 最大值为 4, 则 $\frac{12}{5} \leq x \leq 4$, 故选 C.

易错警示

(2) 分两种情况讨论: 当 OF 在 $\angle BOC$ 内部时; 当 OF 在 $\angle AOD$ 内部时, 注意不要漏解.

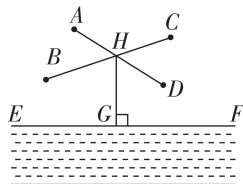
易错警示

斜线段的长度大于垂线段的长度, 本题易错选 C 或 B, 主观认为三条线段中最短的就是垂线段, 或者否定 PC 是垂线段的可能性.

关键点拨

画一条线段或射线的垂线, 就是画它们所在直线的垂线, 垂足不一定在这条线段或射线的延长线上或射线的反向延长线上.

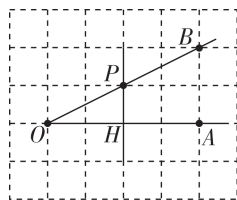
4. 【解】(1) 因为两点之间线段最短, 所以连接 AD, BC 交于点 H , 则点 H 为蓄水池位置(如图所示), 点 H 到四个村庄距离之和最小.



(2) 如图所示, 过点 H 作 $HG \perp EF$, 垂足为 G . 根据“直线外一点与直线上各点连接的所有线段中, 垂线段最短”知, 把河水引入蓄水池 H 中沿 HG 开渠最短.

5. **D** 【解析】因为从直线外一点到这条直线的垂线段的长度, 叫作点到直线的距离, 所以这样测量的依据是点到直线的距离的定义.

6. 【解】(1) 如图所示, PH 即为所求.



(2) 线段 PH 的长度是点 P 到直线 AO 的距离, PC, PH 这两条线段的大小关系是 $PH \leq PC$, 故答案为 $AO, PH \leq PC$.

刷易错

7. **D** 【解析】点 P 到直线 l 的距离是点 P 到 l 的垂线段的长度, 而 PC 不一定是垂线段, 由垂线段最短可知, 点 P 到直线 l 的距离不大于 PC . 故选 D.

4.6 两条平行线间的距离

刷基础

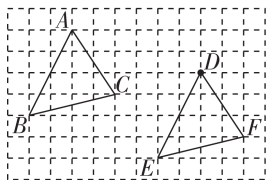
1. **A** 【解析】两条平行线间的距离就是两条平行线间的公垂线段的长度, A 错误; 两平行线的所有公垂线段都相等, B 正确; 两点之间线段最短, C 正确; 垂线段最短, D 正确. 故选 A.

2. **B** 【解析】平行线之间的距离是指从一条直线上一点到另一条直线的垂线段的长度. 故选 B.

3. **C** 【解析】因为两条平行线的公垂线段的长度叫作两条平行线间的距离, 所以线段 AB 和 CD 的长都可以表示直线 m 与 n 之间的距离, 故选 C.

4. **B** 【解析】因为直线 $a \parallel b \parallel c$, 直线 d 与它们分别垂直且相交于 A, B, C 三点, 所以 AB 的长度为直线 a 和 b 之间的距离, BC 的长度为直线 b 和 c 之间的距离, AC 的长度为直线 a 和 c 之间的距离. 又因为 $AB = 3, AC = 8$, 所以 $BC = 8 - 3 = 5$, 即平行线 b, c 之间的距离为 5. 故选 B.

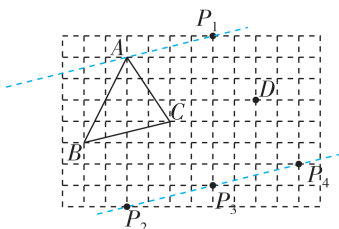
5. 【解】(1) 如图(1), 三角形 DEF 即为所求.



图(1)

(2) 由平移的性质可得 $AD \parallel CF, AD = CF$. 故答案为 $AD \parallel CF, AD = CF$.

(3) 如图(2), 符合条件的点 P 有 4 个. 故答案为 4.



图(2)

6. 【解】(1) 因为 $m \parallel n, CD \perp AB, CD = 3$, 所以直线 m 与 n 之间的距离为 3.

(2) 因为 $CD \perp AB, AD = \frac{9}{4}$,

所以点 A 到 CD 的距离为 $\frac{9}{4}$.

(3) 设点 D 到 BC 的距离为 h . 因为 $CD \perp AB$,

所以 $\frac{1}{2}BD \times CD = \frac{1}{2}h \times BC$.

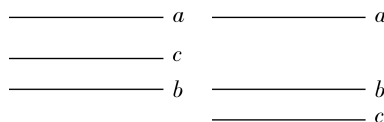
因为 $BC = 5, BD = 4, CD = 3$,

所以 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2}h \times 5$, 所以 $h = \frac{12}{5}$, 即点 D 到

BC 的距离为 $\frac{12}{5}$.

刷易错

7. **A** 【解析】当直线 c 在直线 a, b 之间时, 如图(1), 直线 a, c 间的距离为 $7 - 3 = 4$ (cm); 当直线 c 在直线 a, b 外部时, 如图(2), 直线 a, c 间的距离为 $7 + 3 = 10$ (cm), 所以直线 a, c 间的距离是 4 cm 或 10 cm. 故选 A.



图(1)

图(2)



刷提升

思路分析

根据点到直线上所有点的连线中, 垂线段最短, 可知当 PQ 与直线 d 垂直时, 点 P 与点 Q 的距离最近, 此时 $PQ \parallel a$, 所以 $CQ = AP$, 即 $2t = 30 - 3t$, 解方程即可求出答案.

1. B

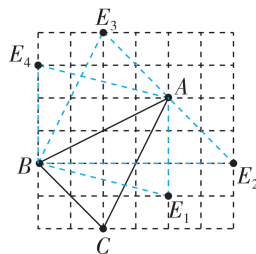
【解析】如图, 设直线 d 与直线 a 交于点 C . 因为直线 $a \parallel b$, 直线 $c \perp a$ 于点 A , 直线 $d \perp b$ 于点 B , 直线 a 与 b 之间的距离为 30 cm, 所以 $c \parallel d, BC = 30$ cm. 连接 PQ , 则当 PQ 与直线 d 垂直时, 点 P 与点 Q 间的距离最近, 此时直线 $a \parallel PQ$, 所以 $CQ = AP$, 所以 $2t = 30 - 3t$, 解得 $t = 6$, 故选 B.

2. C

【解析】因为 A, B 为定点, 所以 AB 的长度为定值. 因为随着点 C 的运动, $AC + BC$ 的值是变化的, 所以三角形 ABC 的周长是变化的, 故①错误. 因为直线 $m \parallel n$, 所以点 C 到底边 AB 的距离不变, 即三角形 ABC 的面积不变, 故②正确. 随着点 C 的运动, $\angle C$ 的度数是变化的, 故③错误. 因为直线 $m \parallel n$, 所以点 C 到直线 m 的距离不变, 故④正确. 综上, 正确的有②④. 故选 C.

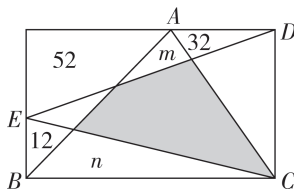
3. A

【解析】如图, 与三角形 ABC 面积相等的格点三角形 ABE 一共有 4 个. 故选 A.



4. 96

【解析】如图. 由题可知三角形 ABC 与三角形 ECD 的面积都等于长方形的面积的一半, 所以 $52 + 32 + m + 12 + n = \frac{1}{2}S_{\text{长方形}} = m + n + S_{\text{阴影}}$, 所以 $S_{\text{阴影}} = 52 + 32 + 12 = 96$. 故答案为 96.



5. ①②③④

【解析】由平移的性质可知, $AC \parallel DF, AD = CF = 2, AC = DF, \angle EDF = \angle BAC = 90^\circ$, 即 $ED \perp DF$, 所以①②正确. 四边形 $ABFD$

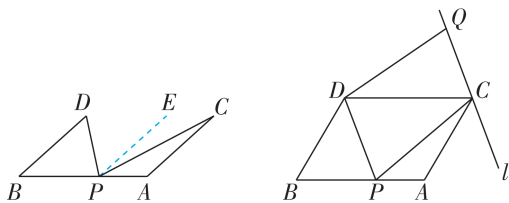
易错警示

分两种情况: 当直线 c 在直线 a, b 之间时和当直线 c 在直线 a, b 外部时, 注意不要漏解.

的周长是 $AD+AB+BF+DF=2+3+(2+5)+4=16$, 所以③正确. 由平移的性质得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$, 所以 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle EOC}=S_{\triangle DEF}-S_{\triangle EOC}$, 即 $S_{\text{四边形}ABEO}=S_{\text{四边形}CFDO}$, 所以④正确. 故答案为①②③④.

6. 【解】(1) 过点 P 作 $PE \parallel AC$, 如图(1)所示.

因为将线段 AC 沿 AB 的方向平移得到线段 BD ,
所以 $AC \parallel BD$, 所以 $PE \parallel AC \parallel BD$,
所以 $\angle ACP = \angle CPE$, $\angle BDP = \angle DPE$.
因为 $\angle CPD = \angle CPE + \angle DPE$,
所以 $\angle CPD = \angle PCA + \angle PDB$.



图(1)

图(2)

(2) ①由平移的性质得, $AC \parallel BD$, $CD \parallel AB$, 所以 $\angle CDP = \angle BPD$. 当 DQ 在 $\angle CDP$ 外部时, 如图(2).

因为 $\angle BDQ = \angle BDP + \angle CDP + \angle QDC$,
 $\angle CDP = 2\angle QDC$,

$$\text{所以 } \angle BDQ = \angle BDP + \frac{3}{2} \angle CDP.$$

因为 $\angle CAB = \alpha = 120^\circ$, 所以 $\angle B = 60^\circ$.

因为 $\angle B + \angle BDC = 180^\circ$, 所以 $\angle CDP = 180^\circ - \angle B - \angle BDP = 120^\circ - \angle BDP$,

$$\text{所以 } \angle BDQ = \angle BDP + \frac{3}{2} (120^\circ - \angle BDP) = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BDP.$$

当 DQ 在 $\angle CDP$ 内部时, 如图(3).

因为 $\angle BDQ = \angle BDP + \angle CDP - \angle QDC$,
 $\angle CDP = 2\angle QDC$,

$$\text{所以 } \angle BDQ = \angle BDP + \frac{1}{2} \angle CDP.$$

因为 $\angle CAB = \alpha = 120^\circ$, 所以 $\angle B = 60^\circ$.

因为 $\angle B + \angle BDC = 180^\circ$,

所以 $\angle CDP = 180^\circ - \angle B - \angle BDP = 120^\circ - \angle BDP$,

$$\text{所以 } \angle BDQ = \angle BDP + \frac{1}{2} (120^\circ - \angle BDP) = 60^\circ + \frac{1}{2} \angle BDP.$$

综上, $\angle BDP$ 与 $\angle BDQ$ 之间的数量关系为

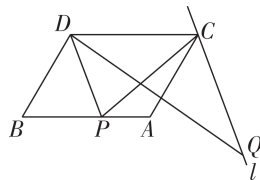
思路分析

(1) 过点 P 作 $PE \parallel AC$, 根据平行线的性质即可得出结论;

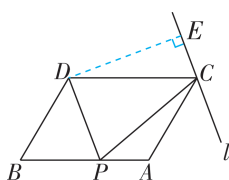
思路分析

(2) ①分两种情况, 画出图形后, 利用平行线的性质求解即可;
②先确定点 P 到直线 l 的最大距离就是线段 CD 的长, 再画出图形, 利用平行线的性质和垂线的性质求解即可.

$$\angle BDQ = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BDP \text{ 或 } \angle BDQ = 60^\circ + \frac{1}{2} \angle BDP.$$



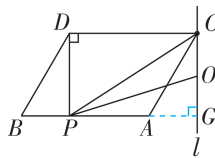
图(3)



图(4)

②三角形 OPC 面积的最大值为 6, 此时 $\angle BDP = \alpha - 90^\circ$. 过点 D 作 $DE \perp l$, 如图(4).
因为 $l \parallel PD$, 所以点 P 到直线 l 的距离就是线段 DE 的长.

因为 $DE \leq CD$, 所以点 P 到直线 l 的最大距离就是线段 CD 的长, 此时 $DP \perp CD$. 作 $PG \perp l$ 于点 G , 如图(5)所示, 由平移的性质得 $AC \parallel BD$, $CD \parallel AB$, $AB = CD = 6$, 所以 $PG = CD = 6$.



图(5)

$$\text{因为 } OC = 2, \text{ 所以 } S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6.$$

因为 $AC \parallel BD$, $CD \parallel AB$,

所以 $\angle CDB = 180^\circ - \angle B = \angle CAB = \alpha$.

因为 $DP \perp CD$, 所以 $\angle CDP = 90^\circ$,

所以 $\angle BDP = \angle CDB - \angle CDP = \alpha - 90^\circ$.

综合与实践 长方体包装盒的设计与制作

刷实践

【解】(1) 如果原正方形纸片的边长为 a , 剪去的小正方形的边长为 b , 则折成的无盖长方体盒子的高为 b , 底面积为 $(a-2b)^2$, 容积为 $(a-2b)^2 b$.
故答案为 $b, (a-2b)^2, (a-2b)^2 b$.

(2) 当 $a = 20 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ 时, $b(a-2b)^2 = 3 \times (20-2 \times 3)^2 = 588 (\text{cm}^3)$, 即 $m = 588$;

当 $a = 20 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ 时, $b(a-2b)^2 = 4 \times (20-2 \times 4)^2 = 576 (\text{cm}^3)$, 即 $n = 576$.

(3) 由表中数据可知, 随着剪去的小正方形的边长的增大, 所折无盖长方体盒子的容积先增大后减小. 由表中数据可知, 当剪去的小正方形的边长为 3 cm 时, 所得的无盖长方体盒子的容积最大, 此时最大容积为 588 cm^3 .

全章综合训练

刷中考

1. C 【解析】如图. 因为

$a \parallel b$, 所以 $\angle 3 = \angle 1 =$

50° , $\angle 2 = \angle 4$, 所以

$\angle 4 = 180^\circ - 60^\circ - \angle 3 =$

70° , 所以 $\angle 2 = \angle 4 = 70^\circ$, 故选 C.

2. C 【解析】因为 $PQ \parallel AB$, $CD \parallel PQ$, 所以

$\angle ABE + \angle BGP = 180^\circ$, $\angle CDG + \angle DGP = 180^\circ$.

因为 $\angle ABE = 130^\circ$, $\angle CDF = 150^\circ$, 所以

$\angle BGP = 50^\circ$, $\angle DGP = 30^\circ$, 所以 $\angle EGF =$

$\angle BGD = \angle BGP + \angle DGP = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$. 故

选 C.

3. 145° 【解析】由题意得 $AC \parallel BD$, $\angle CAB =$

145° , 所以 $\angle ABD = \angle CAB = 145^\circ$, 故答案

为 145° .

4. 40° 【解析】如图. 因为

$AB \parallel CD$, $\angle ACD = 50^\circ$, 所

以 $\angle EAC = \angle ACD = 50^\circ$.

因为 $AC \perp AD$, 所以

$\angle CAD = 90^\circ$, 所以 $\angle \alpha = 180^\circ - \angle EAC -$

$\angle CAD = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$, 故答案为 40° .

5. B 【解析】如图. 因为

$\angle 1 = \angle 2 = 130^\circ$, 所以 $l_1 \parallel$

l_2 , 所以 $\angle 5 = \angle 3 = 75^\circ$. 因

为 $\angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$, 所以

$\angle 4 = 180^\circ - \angle 5 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, 故选 B.

6. 【解】(1) 因为 $DE \parallel BC$, 所以 $\angle C = \angle AED$.

因为 $\angle EDF = \angle C$, 所以 $\angle AED = \angle EDF$, 所以

$DF \parallel AC$, 所以 $\angle BDF = \angle A$.

(2) 三角形 ABC 是等腰直角三角形.

因为 $\angle A = 45^\circ$, 所以 $\angle BDF = 45^\circ$. 因为 DF 平

分 $\angle BDE$, 所以 $\angle BDE = 2\angle BDF = 90^\circ$. 因为

$DE \parallel BC$, 所以 $\angle B = 90^\circ$, 所以三角形 ABC 是等

腰直角三角形.

7. 24 【解析】因为三角形 ABC 沿 BC 方向平移

2 个单位长度得到三角形 DEF , 所以 $DF = AC$,

$AD = CF = 2$, 所以四边形 $ABFD$ 的周长为 $AB +$

$BF + DF + AD = AB + BC + CF + AC + AD = 20 + 2 + 2 =$

24. 故答案为 24.

8. A 【解析】 F_1 的力臂 OA 大于 F_2 的力臂 OB ,

这一判断过程体现的数学依据是垂线段最

短. 故选 A.

刷章测

1. C 【解析】观察各选项可知, 只有 C 选项的

图形能用其一部分平移得到, 所以 C 选项符

合题意, 故选 C.

2. B 【解析】因为 $DE \parallel CB$, $\angle C = 90^\circ$, 所以

$\angle DAC = \angle C = 90^\circ$. 因为 $\angle BAC = 30^\circ$, 所以

$\angle DAB = \angle DAC + \angle BAC = 120^\circ$, 故选 B.

3. B 【解析】依据垂线段最短以及两点之间, 线

段最短, 可得最节省材料的是 B 选项中的方

案, 故选 B.

思路分析

分两种情况: 4. C 【解析】当点 B_1 在线段 BC 上时, 如图(1).

当点 B_1 在线

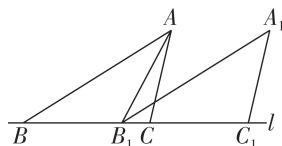
段 BC 上时;

当点 B_1 在 BC

的延长线上

时, 分别求解

即可.



图(1)

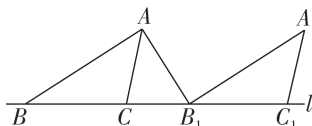
由平移得 $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $\angle AB_1A_1 = \angle BAB_1$.

因为 $\angle AB_1A_1 = 2\angle CAB_1$, 所以 $\angle BAB_1 =$

$2\angle CAB_1$,

所以 $\angle B_1AC = \frac{1}{3}\angle BAC = 15^\circ$.

当点 B_1 在 BC 的延长线上时, 如图(2).



图(2)

由平移得 $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $\angle AB_1A_1 = \angle BAB_1$.

因为 $\angle AB_1A_1 = 2\angle CAB_1$, 所以 $\angle BAB_1 =$

$2\angle CAB_1$,

所以 $\angle CAB_1 = \angle BAC = 45^\circ$. 故选 C.

5. $\angle ADE = \angle B$ (答案不唯一) 【解析】能判定

$DE \parallel BC$ 的条件: $\angle ADE = \angle B$ (答案不唯一).

因为 $\angle ADE = \angle B$, 所以 $DE \parallel BC$ (同位角相等,

两直线平行), 故答案为 $\angle ADE = \angle B$ (答案不

唯一).

刷有所得

根据两平行线

间的距离处处

相等, 可得等

高的两个三角

形的面积比等

于它们的底边

长的比.

6. 12 【解析】过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 过 B 作

$BN \perp CD$ 于 N . 因为 $a \parallel b$, 所以 $CM = BN$. 因为

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot CM$, $S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}CD \cdot BN$,

所以 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CDB} = AB : CD = 1 : 2$. 因为三角

形 ABC 的面积为 6, 所以三角形 BCD 的面

积为 12, 故答案为 12.

7. 4 2 4 【解析】根据题图知, 共有 4 对内错

角,分别是 $\angle 1$ 和 $\angle 4$, $\angle 2$ 和 $\angle 5$, $\angle 6$ 和 $\angle 1$, $\angle 5$ 和 $\angle 7$;2对同位角,分别是 $\angle 7$ 和 $\angle 1$, $\angle 5$ 和 $\angle 6$;4对同旁内角,分别是 $\angle 1$ 和 $\angle 5$, $\angle 3$ 和 $\angle 4$, $\angle 3$ 和 $\angle 2$, $\angle 4$ 和 $\angle 2$.

8. 24° 【解析】

如图,延长 AB 交 DE 于点 H .

因为 $BC \parallel DE$,

$\alpha = 50^\circ$,所以 $\angle BHE = \alpha = 50^\circ$. 因为 $CD \parallel EF$,
 $\beta = 26^\circ$,所以 $\angle DEF = \beta = 26^\circ$. 因为 $AB \parallel EG$,所以 $\angle HEG = \angle BHE = 50^\circ$,所以 $\gamma = \angle DEG - \angle DEF = 50^\circ - 26^\circ = 24^\circ$,故答案为 24° .

9. 【解】(1) 因为 $AB \parallel CD$,所以 $\angle FAB = \angle C = 35^\circ$. 因为 AB 是 $\angle FAD$ 的平分线,所以 $\angle FAD = 2\angle FAB = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$.

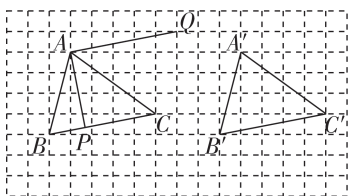
(2) 因为 $\angle ADB = 110^\circ$, $\angle FAD = 70^\circ$,
所以 $\angle ADB + \angle FAD = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$,
所以 $CF \parallel BD$,所以 $\angle BDE = \angle C = 35^\circ$.

10. 【解】(1) 如图,三角形 $A'B'C'$ 即为所求.

三角形 $A'B'C'$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (4+5) \times 4 - \frac{1}{2} \times 5 \times 1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 18 - \frac{5}{2} - 6 = \frac{19}{2}$.

(2) 如图, AP 即为所求.

(3) 如图, AQ 即为所求.



11. 【解】(1) $OP \perp CD$. 理由:因为 $OE \perp AB$,所以 $\angle AOE = 90^\circ$,即 $\angle 1 + \angle AOC = 90^\circ$. 因为 $\angle 1 = \angle 2$,所以 $\angle 2 + \angle AOC = 90^\circ$,即 $\angle POC = 90^\circ$,所以 $OP \perp CD$.

(2) 因为 $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$,且 $\angle BOC = 2\angle AOC$,所以 $\angle AOC = 60^\circ$. 因为 $OE \perp AB$,所以 $\angle AOE = 90^\circ$,所以 $\angle COE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

(3) 与 $2\angle EOF$ 度数相等的角有 $\angle AOD$,
 $\angle BOC$, $\angle FON$, $\angle EOM$. 由 (2) 知 $\angle AOC = 60^\circ$. 因为 OM 平分 $\angle BOD$,所以 $\angle BOM = \angle DOM = \angle AON = \angle CON = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ$.

因为 $OE \perp AB$, $OC \perp OF$,所以 $\angle AOE = \angle EOB = \angle COF = 90^\circ$,所以 $\angle AOC = \angle EOF = 60^\circ$,所以 $\angle AOD = \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ =$

关键点拨

作辅助线并根据平行线的性质求解是解题关键.

思路分析

(1) 根据 $OE \perp AB$,得 $\angle 1$ 与 $\angle AOC$ 互余,由 $\angle 1 = \angle 2$,得 $\angle 2$ 与 $\angle AOC$ 互余,进而可得结论;

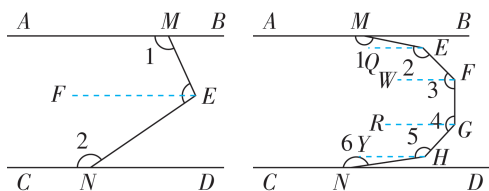
(2) 根据平角的定义得 $\angle AOC$ 的度数,利用垂直定义得 $\angle AOE$ 的度数,进而得 $\angle COE$ 的度数;

(3) 根据 (2) 中 $\angle AOC$ 的度数,分别计算各角的度数,再从各个角中找出与 $2\angle EOF$ 度数相等的所有角.

$120^\circ = 2\angle EOF$. 因为 $\angle AON = 30^\circ$,所以 $\angle NOE = 60^\circ$,所以 $\angle NOF = \angle NOE + \angle EOF = 120^\circ = 2\angle EOF$. 因为 $\angle BOM = 30^\circ$, $\angle EOB = 90^\circ$,所以 $\angle EOM = \angle BOM + \angle EOB = 120^\circ = 2\angle EOF$.

综上,与 $2\angle EOF$ 度数相等的角有 $\angle AOD$,
 $\angle BOC$, $\angle FON$, $\angle EOM$.

12. 【解】(1) 如图(1),过点 E 作 $EF \parallel CD$. 因为 $AB \parallel CD$,所以 $EF \parallel AB \parallel CD$,所以 $\angle 1 + \angle MEF = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle NEF = 180^\circ$,所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle MEN = 360^\circ$.

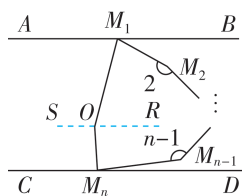


图(1)

(2) 如图(2),过 E 作 $EQ \parallel CD$,过 F 作 $FW \parallel CD$,过 G 作 $GR \parallel CD$,过 H 作 $HY \parallel CD$.

因为 $CD \parallel AB$,所以 $EQ \parallel FW \parallel GR \parallel HY \parallel AB \parallel CD$,所以 $\angle 1 + \angle MEQ = 180^\circ$, $\angle QEF + \angle EFW = 180^\circ$, $\angle WFG + \angle FGR = 180^\circ$,
 $\angle RGH + \angle GHY = 180^\circ$, $\angle YHN + \angle 6 = 180^\circ$,所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 5 \times 180^\circ = 900^\circ$,同理可得题图(3)中 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \dots + \angle n = [180(n-1)]^\circ$,故答案为 900° , $[180(n-1)]^\circ$.

(3) 如图(3),过点 O 作 $SR \parallel AB$.



图(3)

因为 $AB \parallel CD$,所以 $SR \parallel AB \parallel CD$,所以 $\angle AM_1O = \angle M_1OR$, $\angle CM_nO = \angle M_nOR$,所以 $\angle AM_1O + \angle CM_nO = \angle M_1OR + \angle M_nOR$,所以 $\angle AM_1O + \angle CM_nO = \angle M_1OM_n = m^\circ$. 因为 M_1O 平分 $\angle AM_1M_2$,所以 $\angle AM_1M_2 = 2\angle AM_1O$,同理, $\angle CM_nM_{n-1} = 2\angle CM_nO$,所以 $\angle AM_1M_2 + \angle CM_nM_{n-1} = 2\angle AM_1O + 2\angle CM_nO = 2\angle M_1OM_n = 2m^\circ$. 又因为 $\angle AM_1M_2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \dots + \angle n - 1 + \angle CM_nM_{n-1} = [180(n-1)]^\circ$,所以 $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \dots + \angle n - 1 = (180n - 180 - 2m)^\circ$.